Cuadernos de COU y **Selectividad**

FISICA

6

Campos gravitatorio y electrostático

J. J. LOZANO LUCEA y J. L. VIGATÁ CAMPO

Alhambra Longman

Cuadernos de COU y
Selectividad

J. J. Lozano Lucea
J. L. Vigatá Campo

6

Campos gravitatorio y electrostático

FÍSICA

Alhambra Longman

Producción editorial:
Dirección: José Luis Ferrer
Coordinación: Óscar García
Diseño: Gentil Andrade

© ALHAMBRA LONGMAN, S. A., 1992
Fernández de la Hoz, 9. 28010 Madrid.

© J. J. Lozano Lucea y J. L. Vigatá Campo

ISBN 84-205-2127-2

Depósito legal: M. 20.875-1992

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del «Copyright», bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, así como su exportación e importación.

Impreso en España - Printed in Spain

Gráficas Rógar, S. A. - León, 44. Pol. Ind. Cobo Calleja - Fuenlabrada (Madrid)

Contenido

Recordatorio

Concepto de campo. Campos vectoriales y de escalares

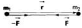
Supongamos un cuerpo (una masa o una carga), situado en una región del espacio tal que a cada punto de esta región (x,y,z) le hacemos corresponder una magnitud vectorial (vector intensidad de campo) que nos mide la fuerza que se ejerce sobre la unidad de masa o la unidad de carga, respectivamente, situada en aquel punto. Entonces diremos que en esta región del espacio hay establecido un *campo vectorial*, al que en general representaremos por *líneas de fuerza del campo*, que indican la dirección del campo y cumplen la condición de que el vector intensidad de campo es tangente a ellas en cualquier punto. Las líneas de fuerza del campo coinciden con la trayectoria que seguiría una carga o una masa (según el caso) que, partiendo del reposo, fuese abandonada libremente a la acción del campo.

Si a cada punto del espacio (x,y,z) podemos asignarle un número, a través de una función uniforme de las coordenadas del punto, que nos dé el valor en dicho punto de la función uniforme definida, diremos que en esta región del espacio tenemos establecido un *campo de escalares*.

Los campos de escalares se representan por medio de *superficies equipotenciales*. Se define superfice equipotencial como el lugar geométrico de los puntos del espacio, en que la función escalar toma el mismo valor.

Intensidad de campo en los campos gravitatorio y eléctrico

Dos partículas de masas m_1 y m_2 se atraen mutuamente con sendas fuerzas que vienen dadas por la ley de la *Gravitación Universal*



$$\vec{F} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

y que están aplicadas en las respectivas masas, teniendo como sentido el de atracción de cada una de ellas ejercido por la otra.

En la expresión anterior $\frac{\vec{r}}{r}$ es el vector unitario en la dirección de la recta que une a las masas.

G es la constante de la Gravitación Universal, que tiene el mismo valor independientemente del medio que separe las masas y que en el SI vale

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2}$$

Dos cargas q_1 y q_2, situadas entre sí a una distancia r, ejercen recíprocamente una fuerza que Coulomb expresó diciendo: *La fuerza de atracción entre dos cargas de signo opuesto, o la de repulsión si son del mismo signo, es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.*

$$\vec{F} = K\,\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}$$

en donde $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$, y en el caso de que el medio que separe las cargas sea el vacío

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

en donde ε_0 es la *permitividad* del vacío.

$$K_0 = 8{,}987 \cdot 10^9\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{C}^{-2} \approx 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{C}^{-2}$$

(ya que el valor de K, y por tanto el de ε, varía según el medio que separe a las cargas).

Una partícula material de masa m_1 produce en los puntos del espacio situados a su alrededor una perturbación (campo vectorial gravitatorio) que se manifiesta en que cuando una segunda partícula material, de masa m, penetra en esta región, actúa sobre ella una fuerza de atracción. En cada punto de esta región puede considerarse definida una función vectorial conocida como *intensidad del campo gravitatorio, g,*

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\,\frac{m_1}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}$$

en donde

$\vec{F}$ Fuerza ejercida sobre la masa m.

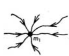
m_1 Masa creadora del campo.

$\vec{g}$ Intensidad del campo gravitatorio.

r Distancia entre la masa que crea el campo y la que sufre la acción.

Una carga q_1 produce en los puntos del espacio situado a su alrededor una perturbación (campo vectorial eléctrico) que se manifiesta en que cuando una segunda carga q penetra en esta región, actúa sobre ella una fuerza, que puede ser de atracción o de repulsión según que los signos de la carga q_1 creadora del campo y de la carga introducida q sean diferentes o iguales, respectivamente. En cada punto de esta región podemos considerar definitiva una función vectorial conocida como *intensidad del campo eléctrico, E,* que representa la fuerza que el campo eléctrico ejerce sobre la unidad de carga positiva situada en el punto.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = K\,\frac{q_1}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}$$



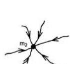
en donde

$\vec{F}$ Fuerza ejercida sobre la carga q.

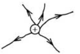
q_1 Carga que crea el campo.

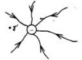
$\vec{E}$ Intensidad del campo eléctrico.

r Distancia entre la carga que crea el campo y la que sufre la acción.



Para representar gráficamente el campo gravitatorio y la magnitud vectorial, intensidad de campo, se utilizan las *líneas de*



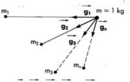


campo o líneas de fuerza, de forma que la intensidad de campo es tangente a ellas en todos sus puntos y su sentido es el indicado.

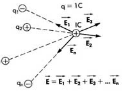
Para representar, de forma similar, el campo eléctrico creado por una carga y la magnitud intensidad del campo eléctrico, hemos de tener en cuenta el signo de la carga creadora del campo (si es positiva o negativa).

Principio de superposición

Si en un punto del espacio P, existe una masa (o una carga) que se ve sometida simultáneamente a la acción de varias masas (o de varias cargas), la intensidad de campo resultante que actúa sobre esta partícula de masa m (o de carga q) es igual a la suma de las intensidades de campo que crean las distintas masas (o las distintas cargas) en el punto P, con independencia de la presencia de las demás masas (o de las demás cargas).



$$\vec{g} = \vec{g_1} + \vec{g_2} + \vec{g_3} + \dots \vec{g_n}$$



$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} + \vec{E_3} + \dots \vec{E_n}$$

Campos conservativos

Las fuerzas gravitatorias y las fuerzas eléctricas son casos particulares de *fuerzas centrales,* y como tales son fuerzas conservativas.

Las *fuerzas conservativas* se definen como aquellas para las que

$$\oint \vec{F} \cdot \vec{dr} = 0$$

es decir, para las que la circulación del vector $\vec{F}$ a lo largo de una trayectoria cerrada es nula.

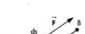
Un campo de vectores en que existan fuerzas conservativas se conoce como *campo conservativo* y en el caso de la fuerzas gravitatorias,

$$\oint \overrightarrow{m\mathbf{g}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}} = 0 \Rightarrow \oint \vec{\mathbf{g}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}} = 0$$

y en los campos eléctricos,

$$\oint q\vec{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}} = 0 \Rightarrow \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}} = 0$$

En un campo conservativo se cumple además que



$$W_{A-B} = \int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}}$$

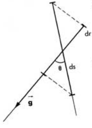
El trabajo para trasladar una masa m o una carga q desde un punto A hasta un punto B no depende del camino seguido, sino de las posiciones del punto de partida y del punto de llegada, lo que permite definir una función de punto conocida como *energía potencial*, cuya variación, ΔU, es tal que

$$W_{A-B} = \int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}} = -(U_B - U_A)$$

es decir,

$$\Delta U = U_B - U_A = -\int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}}$$

y así podemos definir la función variación de la energía potencial, ΔE_p, para un campo gravitatorio creado por una masa m_1,

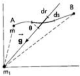


$$\Delta E_p = -\int_A^B m\vec{\mathbf{g}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}}$$

sustituyendo el valor de g, tendremos

$$\Delta E_p = -\int_A^B m \cdot \left(-G\,\frac{m_1}{r^2}\right) ds \cdot \cos\,\theta = E_{pB} - E_{pA}$$

$$\Delta E_p = \int_{r_A}^{r_B} m \cdot \left(G\,\frac{m_1}{r^2}\right) \cdot dr = Gmm_1 \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2}$$



$$\Delta E_p = Gmm_1 \left(-\frac{1}{r}\right)_{r_A}^{r_B} = -\left(G\frac{mm_1}{r_B} - G\frac{mm_1}{r_A}\right)$$

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA}$$

Y para un campo eléctrico definimos la función variación de energía potencial, ΔU, creada por una carga q_1, como

$$\Delta U = U_B - U_A = -\int_A^B q\vec{E} \cdot \vec{ds} = -\int_A^B qE \cdot ds \cdot \cos\theta$$

como

$$dr = ds \cdot \cos\,\theta$$

y sustituyendo el valor de E

$$\Delta U = -\int_{r_A}^{r_B} q \cdot \left(K\frac{q_1}{r^2}\right) \cdot dr = Kq \cdot q_1 \int_{r_A}^{r_B}\left[\frac{dr}{r^2}\right]$$

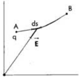
$$\Delta U = K\frac{qq_1}{r_B} - K\frac{qq_1}{r_A}$$

Si asignamos arbitrariamente el valor cero a la energía potencial de uno de los puntos (que tomamos como referencia), podremos definir en los dos casos (campo gravitatorio y campo eléctrico) la *energía potencial en un punto:*
Para el campo gravitatorio,

$$\Delta E_p = -\int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds} = E_{pB} - E_{pA}$$

si

$$E_{pB} = 0 \text{ (referencia)} \Rightarrow \Delta E_p = -E_{pA} = G\frac{mm_1}{r_A}$$



y para el campo eléctrico,

$$\Delta U = -\int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds} = U_B - U_A$$

si ahora

$$U_B = 0 \text{ (referencia)} \Longrightarrow \Delta U = -\,U_A = -K\,\frac{qq_1}{r_A}$$

En este caso cabe hacer notar que según el signo de las cargas, la energía potencial en un punto puede ser positiva o negativa. Si las cargas son del mismo signo, es positiva; si son de signo opuesto, es negativa.

Campo de potenciales

En el caso de campos vectoriales conservativos, cabe establecer un campo de escalares en la misma región en que está establecido el campo vectorial conservativo, conocido como *campo de potenciales.*

Para los campos conservativos vectoriales vamos a establecer el concepto de *potencial en un punto del campo.* Se define como la energía potencial que tiene en el punto considerado la unidad de masa (en el caso del campo gravitatorio) o la unidad de carga positiva (en el caso del campo eléctrico).

$$V_A = \frac{E_p}{m} = -G\,\frac{m_1}{r_A}$$

$$V_A = \frac{U_A}{q} = K\,\frac{q_1}{r_A}$$

En todo el espacio que rodea a la masa m_1 o a la carga q_1, tenemos establecido un campo de escalares, medido por la función potencial en un punto del campo, y a la vez tenemos establecido un campo de vectores, medido por la magnitud vectorial intensidad de campo en el mismo punto. Entre las dos funciones puede demostrarse que existe una relación tal que

$$-\,\overrightarrow{\text{grad}V_{\text{grav}}} = \vec{g}$$

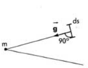
o bien

$$-\overrightarrow{\text{grad}V_{\text{eléc}}} = \vec{E}$$

Este campo de potenciales podemos representarlo por *superficies equipotenciales,* que no son más que los lugares geométricos de los puntos del campo que tienen el mismo potencial.

Las características más importantes de las superficies equipotenciales son las siguientes:

a) Son perpendiculares en cada punto a las líneas de fuerza del campo.



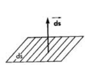
En un desplazamiento sobre una superficie equipotencial, al ser el potencial constante

$$dV = 0 \Longrightarrow dV = -\vec{g} \cdot \vec{ds} = 0$$

es decir, $\vec{g}$ y $\vec{ds}$ son perpendiculares.

b) El vector intensidad de campo es de signo opuesto al $\overline{\text{grad}V}$, lo que significa que el vector intensidad de campo está dirigido hacia las superficies equipotenciales de menor valor del potencial.

Vector *dS*

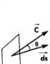


$|\vec{ds}|$ = Área

Es el vector que caracteriza a una superficie dS.

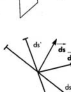
Dirección: Perpendicular a la superficie.
Módulo: Valor del área.
Sentido: Suele tomarse de la zona cóncava de la superficie a la convexa, del interior al exterior del cuerpo y si la superficie es plana el sentido es totalmente arbitrario.
Punto de aplicación: Cualquier punto de la superficie a que hace referencia.

Flujo de un vector a través de una superficie



Supongamos un campo de vectores $\vec{C}$ y una superficie elemental dS. Se conoce como *flujo elemental* $d\phi$ al escalar dado por

$$d\phi = \vec{C} \cdot dS = C \cdot dS \cdot \cos\theta = C \cdot dS_n$$



Esta magnitud nos mide el número de líneas de fuerza del campo que atraviesan la superficie dS', colocada normalmente a las mismas.

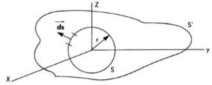
Y a través de cualquier superficie S, el flujo ϕ valdrá

$$\phi = \int_S \vec{C} \cdot \vec{dS}$$

La unidad de medida del flujo es $N \cdot kg^{-1} \cdot m^2$ para lo campos gravitatorios y $N \cdot C^{-1}$ m^2 para los campos eléctrico

Teorema de Gauss referido a un campo gravitatorio

Consideremos una masa puntual m, que crea un campo, situac en el origen de coordenadas y supongamos que está rodeada c una superficie cerrada S'. Con centro en la masa m tracemos ur superficie esférica S, de radio arbitrario r. Vamos a calcular flujo que atraviesa la superficie S, que no será otro que el que atr viese la superficie esférica S, pues las líneas de fuerza que atraviesa la superficie interior después atravesarán la otra, y por tanto flujo será el mismo en ambos casos.



El flujo a través de la superficie de radio r valdrá

$$\phi = \int_S \vec{g} \cdot \vec{ds} = \int_S \left(-G \frac{m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \cdot \vec{dS}$$

pero como

$$\vec{r} \cdot \vec{dS} = r \cdot dS \cdot \cos\theta = r \cdot dS$$

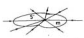
ya que θ vale 0; sustituyendo y teniendo en cuenta que G, m y son constantes para toda la superficie esférica,

$$\phi = -G \frac{m}{r^2} \int_S dS = -G \frac{m}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = -4\pi G\, m$$

Si las masas interiores a la superficie esférica son varias, m m_2, m_3, etc., el flujo valdrá

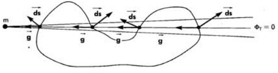
$$\phi = 4\pi G \cdot \Sigma m_{int}$$

siendo Σm_{int} la suma de todas las masas interiores a esta superficie.



El flujo creado a través de la superficie S' por las masas interiores a esta superficie es siempre un flujo entrante.

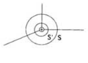
Por el contrario, si la masa que crea el campo es exterior a la superficie cerrada de referencia, no origina flujo, ya que el flujo entrante es igual y de signo opuesto al flujo saliente y el flujo total resulta ser nulo.



Teorema de Gauss referido a un campo eléctrico

Consideremos una carga q, que crea un campo eléctrico, y supongamos que está rodeada por una superficie cerrada S. Concéntrica a ella tracemos una superficie esférica de radio r. El flujo que atraviesa la superficie S será el mismo que el que atraviesa la superficie esférica S' concéntrica con S.

Se cumple que



$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \int_S \left(K \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}\right) \cdot \vec{dS}$$

y, como en el caso anterior,

$$\vec{r} \cdot \vec{dS} = r \cdot dS$$

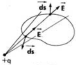
Simplificando ahora y teniendo en cuenta que K, q, y r son constantes

$$\phi = K \frac{q}{r^2} \int_S dS = K \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon}$$

siendo ε la constante dieléctrica del medio que rodea a la carga.

Si son varias las cargas interiores a la superficie S', el flujo valdrá

$$\phi = \frac{\Sigma q_{int}}{\varepsilon}$$



$\Phi_T = 0$

en este caso, Σq_{int} se refiere a la suma algebraica de las cargas atendiendo al signo de cada una, teniendo en cuenta que si el signo del flujo total es negativo significa un flujo entrante (sumidero) y si es positivo corresponde a un flujo saliente (fuente).

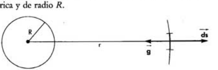
Si la carga es exterior a la superficie cerrada considerada, no origina flujo neto, ya que el flujo entrante es igual y de signo opuesto al flujo saliente y el flujo total resulta ser nulo.

Aplicaciones del Teorema de Gauss

El Teorema de Gauss se aplica para calcular intensidades de campo creadas por distribuciones continuas de masas o cargas, no puntuales. Veamos unos ejemplos:

Cálculo de la intensidad de campo y del potencial creados por una distribución de masa de forma esférica en un punto exterior

Consideremos una distribución continua de masa m de forma esférica y de radio R.



Para calcular la intensidad de campo creada por esta distribución de masas en un punto exterior a la esfera situado a una distancia r del centro de la misma, procederemos como sigue:

Consideramos una superficie esférica de centro el de la esfera y radio r, que contendrá a nuestro punto, y a continuación calculamos el flujo a través de esta esfera aplicando el Teorema de Gauss

$$\phi = -4\pi\ G\ m$$

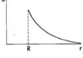
y a través de la definición de flujo

$$\phi = \oint_S \vec{g} \cdot \vec{dS}$$

sustituyendo valores e integrando, nos queda

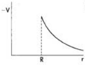
$$g = G \frac{m}{r^2}$$

es decir, que el valor de la intensidad de campo en este punto es el mismo que el que crearía una masa puntual, m, que estuviese concentrada en el centro de la esfera.



Para hallar el valor del potencial creado por la esfera de masa m en el punto considerado, tendremos en cuenta que por la definición de gradiente del potencial

$$dV = -\vec{\mathbf{g}} \cdot \vec{\mathbf{dr}}$$

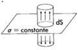


y sustituyendo el valor de la intensidad de campo e integrando nos queda

$$V_A = V_A - V_\infty = \int_\infty^A - g \cdot dr = -G \frac{m}{r_A}$$

Cálculo de la intensidad de campo creada por una distribución continua de carga, de forma plana e ilimitada y con densidad superficial de carga constante, en un punto exterior

En este tipo de distribuciones de carga se demuestra que las líneas de fuerza del campo son perpendiculares a la superficie cargada. Tomemos un elemento dS sobre la distribución plana de carga que indicamos y procedemos a cerrarlo imaginariamente en un cilindro constituido por las líneas de fuerza que rodean el elemento dS y sendos planos paralelos a nuestra superficie.



Calculemos el flujo que atraviesa las bases y las paredes laterales del cilindro de la figura.

$$d\phi_{\text{total}} = d\phi_{\text{bases}} + d\phi_{\text{lat}}$$

$$d\phi_{\text{lat}} = \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dS}}_{\text{lat}} = 0$$

$$d\phi_{\text{bases}} = 2\,(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{dS}}) = 2\,E \cdot dS \cdot \cos 0° = 2\,E \cdot dS$$

$$d\phi_{\text{total}} = 2\,E \cdot dS$$

Como según el Teorema de Gauss

$$d\phi_{\text{total}} = \frac{dq}{\varepsilon} = \frac{\sigma \cdot dS}{\varepsilon}$$

e igualando los flujos

$$\frac{\sigma \cdot dS}{\varepsilon} = 2E \cdot dS \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

Conductores y dieléctricos. Distribución de las cargas

Un *conductor* es un material en cuyo seno las cargas eléctricas tienen movilidad, y un *dieléctrico* es un material en el que las cargas eléctricas no tienen movilidad, estando los electrones localizados en los átomos respectivos sin posibilidad de desplazamiento a lo largo del cuerpo.

Para un conductor cargado en equilibrio, puede comprobarse que el campo eléctrico en el interior del mismo es nulo y, por tanto, las cargas están situadas en su superficie.

Los dieléctricos son sustancias que presentan en su constitución exclusivamente enlaces covalentes o bien sustancias iónicas en estado sólido. Podemos distinguir dos tipos de dieléctricos: polares y apolares.

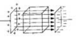
Los dieléctricos polares están formados por dipolos. Un *dipolo* está constituido por dos cargas iguales, de signo opuesto, separadas una cierta distancia. Cada dipolo se caracteriza por su momento dipolar.

$\mu = q \cdot l$

Llamamos *momento dipolar* a un vector cuya dirección viene dada por la línea de unión de las cargas que forman el dipolo, el sentido se toma de la carga positiva a la carga negativa y su módulo vale el producto de una de las cargas por la distancia que las separa.

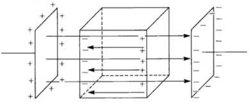
Cuando aparecen cargas en los dieléctricos, quedan acumuladas en los puntos en donde se crean, pues al no presentar movilidad no podrán desplazarse de la región en que se encuentran.

Acción de un campo eléctrico sobre un conductor

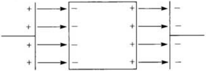


Al situar un conductor en el interior de un campo eléctrico, inicialmente el campo atraviesa al conductor, de forma que las líneas de fuerza inciden perpendicularmente sobre la pared del conductor.

Esta acción inicial provoca que las cargas negativas situadas en la superficie del conductor sean atraídas por el campo eléctrico, y las positivas, repelidas, lo que da lugar a que en el interior del conductor se origine una separación de cargas (por desplazamiento de las negativas) y, con ello, un campo de sentido opuesto al inicial que llega a anularle.



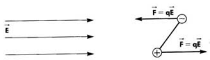
En el exterior del conductor sigue existiendo el campo eléctrico inicial y las líneas de fuerza arrancan de forma perpendicular a la superficie del mismo.



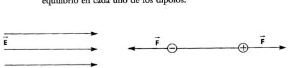
Podemos, pues, concluir que un conductor bajo la acción de un campo eléctrico se comporta de forma impermeable a las líneas de fuerza del campo, y por tanto el campo eléctrico en el interior de un conductor es nulo.

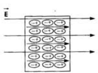
Acción de un campo eléctrico sobre un dieléctrico

Supongamos en primer lugar que es un dieléctrico polar el que situamos bajo la acción del campo eléctrico. Cada uno de los dipolos, al estar bajo la acción del campo eléctrico, se verá sometido a la acción de un par de fuerzas,



Este par de fuerzas determinará que los dipolos se orienten de forma que las líneas de fuerza del campo acabarán penetrando por la carga negativa y saliendo por la positiva, y se alcanzará el equilibrio en cada uno de los dipolos.

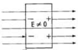




dieléctrico

Si la intensidad de campo a la que está sometido el dieléctrico va aumentando, cada vez será mayor el número de dipolos orientados, hasta alcanzarse la saturación en el momento en que todos estén orientados.

Si la intensidad de campo sigue aumentando, puede suceder que las fuerzas que actúen sobre los dipolos lleguen a romperlos, produciéndose una ionización en el momento en que las cargas se separen. En este caso, el dieléctrico se habrá convertido en un conductor; se dice entonces que el dieléctrico *ha quedado perforado.* Si, habiendo aumentado la intensidad de campo, no llegamos hasta estos extremos, lo único que sucede es que en las paredes del dieléctrico aparecen cargas eléctricas, lo que da lugar a que en el interior del mismo se origine un campo de sentido opuesto al inicial que no llega a anularlo, pero que sí lo debilita.



$\vec{E}i$ disminuye

Si el dieléctrico es apolar, al no existir dipolos no pueden orientarse inicialmente bajo la acción del campo. Como en los átomos hay cargas positivas y negativas (núcleos y electrones), el campo eléctrico actúa sobre ellas atrayendo a las negativas y repeliendo a las positivas, por lo que acaban produciéndose dipolos atómicos. A partir de este momento, el dieléctrico apolar se comporta exactamente igual que los dieléctricos polares, es decir, *llega a debilitar el campo eléctrico exterior cuando éste penetra en el dieléctrico, pero no puede llegar a evitar que algunas líneas del campo exterior atraviesen el dieléctrico.*

En el caso de campos eléctricos en el seno de dieléctricos, la expresión para la intensidad de campo eléctrico es

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r^2}$$

en la que ε es la constante dieléctrica del medio considerado, que está relacionada con ε_0 a través de la expresión

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$$

Las dimensiones y unidades de ε son las de ε_0, ya que ε_r es un número sin dimensiones.

Cuestiones

1. Una carga situada en un punto del espacio crea un campo a su alrededor cuya intensidad en un punto dado depende del medio. [V] [F]

2. Es posible situar un satélite en órbita de modo que permanezca siempre sobre el mismo lugar. [V] [F]

3. Al descender de un automóvil en un día seco después de un viaje largo y tocar la carrocería, pueden notarse descargas eléctricas. [V] [F]

4. Una persona disminuye de peso al viajar en avión con respecto al que tenía antes de iniciar el viaje. [V] [F]

5. Las mareas son consecuencia de la atracción gravitatoria del Sol y de la Luna sobre las aguas del mar. [V] [F]

6. En un campo de vectores de tipo conservativo puede haber puntos del campo en que las líneas de fuerza desaparezcan. [V] [F]

7. Un cuerpo cargado se descarga espontáneamente en el aire. [V] [F]

8. Un punto de un campo de vectores determinado puede ser atravesado por dos líneas de fuerza. [V] [F]

9. La intensidad de campo eléctrico que una esfera hueca uniformemente cargada crea en los puntos de su interior es nula. [V] [F]

10. El trabajo realizado por una fuerza conservativa tiene siempre signo negativo. [V] [F]

11. En un campo vectorial siempre puede definirse la función energía potencial. [V] [F]

12. En un campo de fuerzas conservativas el trabajo a lo largo de una trayectoria cerrada partiendo de un punto y volviendo al mismo es nulo. [V] [F]

13. La energía potencial gravitatoria de una masa m, situada en un punto exterior a la Tierra es siempre mgh (en donde g es constante). [V] [F]

14. Los valores de la función potencial en el caso de campos creados respectivamente por cargas positivas y negativas tienen distinto signo. V F

15. Una masa abandonada en el interior de un campo gravitatorio se mueve desde los puntos de mayor potencial a los de menor potencial. V F

16. Las líneas de fuerza siguen la dirección de las superficies equipotenciales en un campo de fuerzas conservativo. V F

17. Si la Tierra redujese su volumen a la cuarta parte manteniendo su masa constante, el radio de giro alrededor del Sol quedaría reducido a la mitad. V F

18. Entre la Tierra y la Luna existen puntos en que la intensidad de campo gravitatorio Tierra-Luna es nula. V F

19. Si la Tierra tuviese una masa doble que la actual y mantuviera sin modificar la órbita, el tiempo que emplearía en dar una vuelta alrededor del Sol aumentaría al doble. V F

20. Si la Tierra aumentase mucho la velocidad angular en su giro sobre sí misma, la fuerza que las personas ejercen sobre el suelo en París sería más pequeña. V F

21. Si una carga ejerce sobre otra una fuerza F, el valor de esta fuerza en particular se modifica si existen otras cargas a su alrededor. V F

22. La intensidad de campo en un punto exterior a una masa de forma esférica es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el punto hasta el centro de la esfera. V F

23. El potencial interior de un conductor cargado tiene un valor constante en todos sus puntos. V F

24. Un punto de un campo eléctrico puede tener intensidad nula y potencial no nulo. V F

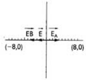
Soluciones a las cuestiones propuestas

1	V	7	V	13	F	19	F
2	V	8	F	14	V	20	V
3	V	9	V	15	V	21	F
4	V	10	F	16	F	22	V
5	V	11	F	17	F	23	V
6	F	12	V	18	V	24	V

Ejercicios resueltos

1. Una masa puntual de 20 kg está situada en el punto A (8,0) y otra masa de 40 kg está situada en el punto B (−8,0). ¿Cuál es el valor de la intensidad de campo y el del potencial en el origen de coordenadas?

Resolución



$$E_A = G\,\frac{m}{r^2}$$

$$E_A = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{20}{8^2}\,\mathrm{N \cdot kg^{-1}} = 2{,}08 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot kg^{-1}}$$

$$E_A = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{40}{8^2}\,\mathrm{N \cdot kg^{-1}} = 4{,}16 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot kg^{-1}}$$

Las intensidades de campo tienen la dirección y el sentido que se indican en la figura y la intensidad de campo resultante será

$$\vec{E} = \vec{E_A} + \vec{E_B} = E_A \cdot \vec{i} - E_B \cdot \vec{i} = -2{,}08 \cdot 10^{-11}\,\vec{i}\,\mathbf{N \cdot kg^{-1}}$$

El potencial que crea cada una de las masas en el origen valdrá

$$V_A = -G\,\frac{m_A}{r_A} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}\,\frac{20\ \mathrm{kg}}{8\ \mathrm{m}} = -1{,}66 \cdot 10^{-10}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$$

$$V_B = -G\,\frac{m_B}{r_B} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}\,\frac{40\ \mathrm{kg}}{8\ \mathrm{m}} = -3{,}32 \cdot 10^{-10}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$$

El potencial total será la suma de potenciales en el punto.

$$\mathbf{V} = V_A + V_B = -4{,}98 \cdot 10^{-10}\,\frac{\mathbf{J}}{\mathbf{kg}}$$

2. Calcular el valor de la intensidad de campo gravitatorio, g, en un punto A situado a una altura de 1.000 km de la superficie terrestre en el supuesto de que el valor de g al nivel del mar sea 9,8 N. kg^{-1}.

(Radio terrestre: 6.370 km.)

Resolución

A una altura de 1.000 km, g_A valdrá

$$g_A = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

y al nivel del mar g_0 valdrá

$$g_0 = G \frac{M_T}{R_T{}^2}$$

Dividiendo miembro a miembro ambas expresiones tenemos

$$\frac{g_A}{g_0} = \frac{R_T{}^2}{(R_T + h)^2}$$

y despejando g_A,

$$g_A = g_0 \left(\frac{R_T}{R_T + h} \right)^2 = 9{,}8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1} \left(\frac{6370 \cdot 10^3}{7370 \cdot 10^3} \right)^2$$

$$\mathbf{g_A = 7{,}3 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}}$$

3. ¿Cuál es el valor de la energía potencial gravitatoria de un satélite de 10^4 kg de masa, situado en órbita alrededor de la Tierra a una altura sobre la superficie de 200 km?

(Masa de la Tierra: $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; radio: 6.370 km).

Resolución

La energía potencial gravitatoria de un cuerpo en órbita alrededor de la Tierra vale

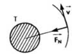
$$E_p = m \cdot V_A = -mG\,\frac{M}{(R+h)} =$$

$$= 10^4\ \text{kg} \cdot \left(-6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}\,\frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{6570 \cdot 10^3\ \text{m}}\right)$$

$$E_p = -6{,}07 \cdot 10^{11}\ \text{J}$$

4. ¿Cuál debería ser la velocidad de traslación alrededor de la Tierra del satélite del problema anterior para mantenerse en órbita?

Resolución



Para mantenerse en órbita deberá cumplir:

$$F_{\text{atracción grav.}} = F_{\text{normal}}$$

$$G\,\frac{M_T \cdot m}{(R_T+h)^2} = m\,\frac{v^2}{(R_T+h)}$$

Simplificando y despejando v, tendremos

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{(R_T+h)}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(6370+200) \cdot 10^3}}\ \text{m/s}$$

$$v = 7791\ \text{m/s}$$

5. ¿Con qué velocidad mínima debería ser lanzado un cohete para que pudiese escaparse del campo gravitatorio terrestre en el supuesto de que el lanzamiento se efectuase desde 2000 m sobre el nivel del mar?

(Radio terrestre: 6370 km; masa terrestre: $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.)

Resolución

La energía del cohete una vez lanzado se supone que se conserva mientras se mueva en el seno del campo gravitatorio (que es un campo de fuerzas conservativo). Inicialmente, por tanto, tendrá una cierta energía cinética y una cierta energía potencial. Cuando el cohete salga del campo gravitatorio su energía potencial deberá ser nula (ya que en el exterior del campo la fuerza de atracción es nula). Por otra parte, la mínima energía cinética con que puede llegarse a esta región corresponde a velocidad cero, es decir, a energía cinética cero, por tanto, como

$$E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2}$$

$$\frac{1}{2}\ mv^2 + \left(-G\,\frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)}\right) = 0 + 0$$

simplificando y despejando v, tendremos

$$v = \sqrt{\frac{2\,G \cdot M_T}{(R_T + h)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(6370 + 200) \cdot 10^3}}\ \text{m/s}$$

$$\boldsymbol{v = 11{,}10 \cdot 10^3\ \text{m/s}}$$

6. Un satélite de 2.000 kg está en órbita estable alrededor de la Tierra a una altura igual a la mitad del radio terrestre por encima del nivel del mar y queremos que orbite a una altura dos veces el radio terrestre. ¿Qué trabajo necesitaremos para trasladarlo de órbita?

(Radio terrestre: 6.370 km; masa terrestre: 5,98 · 10^{24} kg.)

Resolución

El trabajo necesario para trasladarlo desde una órbita más baja a otra más alta nos viene dado por la diferencia entre las energías mecánicas que corresponderían al satélite en las respectivas órbitas.

En la primera órbita,

$$E_{m1} = E_{c1} + E_{p1} = \frac{1}{2}\ m\ v_1^2 + \left(-G\,\frac{M_T \cdot m}{(R_T + h_1)}\right)$$

el valor de la velocidad que aparece en esta ecuación podemos deducirlo teniendo en cuenta que

$$F_{\text{atracción}} = F_{\text{normal}}$$

$$G\,\frac{M_T \cdot m}{r^2} = m\,\frac{v^2}{r}$$

de lo que se deduce

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Al llevar el valor que hemos obtenido a la ecuación que expresa el valor de la energía mecánica del satélite en la primera órbita, tendremos.

$$E_{m1} = \frac{1}{2}\,m\left(\frac{G \cdot M_T}{R_T + 0{,}5R_T}\right) - G\,\frac{M_T \cdot m}{R_T + 0{,}5R_T} =$$

$$= -\,\frac{1}{3}\,G\,\frac{M_T \cdot m}{R_T}$$

Para la segunda órbita

$$E_{m2} = \frac{1}{2}\,m \cdot \left(\frac{G \cdot M_T}{R_T + 2R_T}\right) - G\,\frac{M_T \cdot m}{3 \cdot R_T} =$$

$$= -\,\frac{1}{2}\,G\,\frac{M_T \cdot m}{R_T}$$

y como el incremento de energía mecánica es igual al trabajo desarrollado,

$$E_{m2} - E_{m1} = W_{\text{desarrollado}}$$

$$W = \left(-\,\frac{1}{6}\,G\,\frac{M_T \cdot m}{R_T}\right) - \left(-\,\frac{1}{3}\,G\,\frac{M_T \cdot m}{R_T}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\,G\,\frac{M_T \cdot m}{R_T}$$

$$W = \frac{1}{6}\,6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.98 \cdot 10^{24} \cdot 2 \cdot 10^{3}}{6370 \cdot 10^{3}}\ \text{Julios}$$

$$\mathbf{W} = 2{,}08 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

7. Al llegar a un planeta desconocido un astronauta deja oscilar un péndulo simple de 0,8 m de longitud y el período de oscilación resulta ser de 2,8 s. Si previamente desde la nave había medido el radio del planeta encontrando que el valor de éste era de 0,6 R_T, ¿qué masa puede asignarse al planeta?

(Radio terrestre: 6.370 km.)

Resolución

Sabemos que un péndulo simple oscila con un período que nos viene dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g'}}$$

en la que g' representa el valor de la intensidad de campo en el punto de oscilación. Si ésta tiene lugar en la superficie del planeta, se cumple que

$$g' = G \frac{M_p}{R_p^2}$$

sustituyendo este valor en la fórmula que nos da el valor del período y despejando M_p tenemos

$$M_p = \frac{4\pi^2 \cdot l \cdot R_p^2}{G \cdot T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}8 \cdot (0{,}6 \cdot 6370 \cdot 10^3)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}8^2} \text{ kg}$$

$$\boldsymbol{M_p = 2{,}44 \cdot 10^{24}} \textbf{ kg}$$

8. Desde una estación espacial que orbita a una distancia de $40R_T$ sobre la superficie terrestre, unos astronautas miden la velocidad de un cohete, lanzado desde la Tierra, que pasa por sus proximidades y que resulta ser de 3.000 m/s. ¿Podrá el cohete escaparse del campo gravitatorio terrestre?

(Radio terrestre: 6.370 km.)

Resolución

Calcularemos ahora la velocidad de escape que debería llevar el cohete a la altura de la estación espacial. Para ello tendremos en cuenta que el cohete se está moviendo en un campo de fuerzas conservativo, y la velocidad podrá hallarse haciendo un balance de energías:

$$E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2}$$

$$\frac{1}{2}\,mv^2 + \left(-G\,\frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)}\right) = 0 + 0$$

simplificando y despejando v,

$$v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R + h}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{(6.370 + 40 \cdot 6.370) \cdot 10^3\ \mathrm{m}}}$$

$$v = 1.751\ \mathrm{m/s}$$

Como el cohete está moviéndose a 3.000 m/s, llegamos a la conclusión de que se escapará del campo gravitatorio terrestre.

9. Una persona pesa en la Tierra 60 kp. ¿Qué peso tendrá en la Luna? Despreciar las fuerzas que provocan sobre la persona en cuestión los movimientos de la Luna, así como la acción del campo gravitatorio terrestre sobre la persona en la Luna.

(Suponer $M_T = 81M_L$ y $R_L = 0{,}2723\ R_T$.)

Resolución

La intensidad de campo gravitatorio en la superficie de la Tierra vale

$$g_T = G\,\frac{M_T}{R_T^2}$$

y en la Luna la intensidad del campo gravitatorio propio es

$$g_L = G \frac{M_L}{R_L{}^2}$$

dividiendo miembro a miembro ambas expresiones tendremos

$$\frac{g_T}{g_L} = \frac{M_T \cdot R_L{}^2}{M_L \cdot R_T{}^2}$$

De aquí podemos despejar g_L

$$g_L = g_T \cdot \frac{R_T{}^2 \cdot M_L}{R_L{}^2 \cdot M_T} = 9{,}8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \frac{R_T{}^2 \cdot M_L}{(0{,}2723 R_T)^2 \cdot 81 M_L}$$

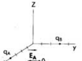
$$g_L = 1{,}63 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

En la Tierra la masa de esta persona era de 60 kg, ya que su peso era de 60 kp. En la Luna su masa es la misma, pero el peso cambia

$$\textbf{Peso}_{\text{luna}} = m \cdot g_L = 60 \text{ kg} \cdot 1{,}63 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1} = \mathbf{97{,}8\ N = 9{,}97\ kp}$$

10. Dos cargas en reposo, $q_A = -10^{-5}$ C y $q_B = 2 \cdot 10^{-5}$ C, están situadas en el vacío en los puntos (4,0,0) y (0,3,0), respectivamente. Calcular la intensidad de campo y el valor del potencial en el punto O (4,3,0).

Resolución



Hallemos los módulos de las intensidades de campo creadas por las cargas q_A y q_B en el punto O considerado.

$$E_A = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-5}}{3^2} N \cdot C^{-1} = 10^4 N \cdot C^{-1}$$

$$E_B = 9{,}10^9 \frac{2 \cdot 10^{-5}}{4^2} N \cdot C^{-1} =$$

$$= 0{,}562 \cdot 10^4 N \cdot C^{-1}$$

y, como vemos en la figura, $\vec{E_A}$ y $\vec{E_B}$ son vectores que forman entre sí un ángulo de 90° y, por tanto, la intensidad resultante $\vec{E}$ será

$$E = \sqrt{(10^4)^2 + (0{,}562 \cdot 10^4)^2}\ N \cdot C^{-1} = 11{,}47 \cdot 10^3\ N \cdot C^{-1}$$

y para calcular θ, que nos da la dirección de E, haremos

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{E_B}{E_A} = \frac{0{,}562 \cdot 10^4}{10^4} = 0{,}562$$

de donde deducimos

$$\theta = 29°21'27''$$

Para hallar el potencial creado en el punto O, determinemos el potencial que crea cada carga en dicho punto y sumemos algebraicamente los valores obtenidos.

$$V_A = K \frac{q_A}{r_A} = 9 \cdot 10^9 \frac{-10^{-5}}{3}\ V = -\ 3 \cdot 10^4\ V$$

$$V_B = K \frac{q_B}{r_B} = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-5}}{4} = 4{,}5 \cdot 10^4\ V$$

Por tanto, el potencial total en O vale

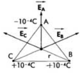
$$V = V_A + V_B = -3 \cdot 10^4\ V + 4{,}5 \cdot 10^4\ V = 1{,}5 \cdot 10^4\ V$$

11. En los vértices de un triángulo equilátero de 1 m de lado se sitúan cargas de 10^{-4}, 10^{-4} y -10^{-4} culombios, respectivamente. Calcular el valor de la intensidad de campo y del potencial en el baricentro del triángulo.

Resolución

Hallemos primero el valor de r:

$$h = 1 \text{ m sen } 60° = 0{,}866 \text{ m}$$

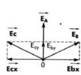


$$r = \frac{2}{3}h = 0{,}577 \text{ m}$$

Ahora podemos calcular el módulo de la intensidad de campc que crea cada una de las cargas en el baricentro.

$$E_A = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-4}}{0{,}577^2} N \cdot C^{-1} = 27 \cdot 10^5 N \cdot C^{-1}$$

$$E_B = E_C = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-4}}{0{,}577^2} N \cdot C^{-1} = 27 \cdot 10^5 N \cdot C^{-1}$$



Estos vectores tienen la dirección y sentido que hemos indicadc en la figura y el campo resultante se hallará componiendo esto: vectores. Para ello descomponemos los vectores en la direcciór del eje de las X y en la dirección del eje de las Y, cuyo origer situamos en el punto O (baricentro).

La componente sobre el eje de abscisas vale

$$E_x = E_B \cos 30° - E_C \cos 30° = 0$$

y sobre el eje de ordenadas,

$$E_y = E_A + E_B \text{ sen } 30° + E_C \text{ sen } 30° =$$

$$= [27 \cdot 10^5 + (27 \cdot 10^5 \cdot 0{,}5)2]\ N\, C^{-1}$$

$$\boldsymbol{E_y = 54 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1} = E_{\text{total}}}$$

Para hallar el potencial en el baricentro, hallaremos el potencia que crea cada carga en el punto y los sumaremos algebraicamente teniendo en cuenta el signo.

$$V_A = K\frac{q_A}{r} = 9 \cdot 10^9 \frac{-10^{-4}}{0{,}577} V = -15{,}5 \cdot 10^5 \cdot V$$

$$V_B = V_C = K\frac{q}{r} = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-4}}{0{,}577} V = 15{,}5 \cdot 10^5 V$$

$$\boldsymbol{V_{\text{total en el baricentro}} = V_A + V_B + V_C = 15{,}5 \cdot 10^5 V}$$

12. Un campo de potenciales está definido en el plano XY por la función continua $V = 2y - x^2$. Determinar:

a) Forma geométrica de las superficies equipotenciales.

b) Valor de la intensidad de campo en cada punto del plano.

Resolución

a) Sabemos que las superficies equipotenciales son el lugar geométrico de los puntos del plano en los que la función potencial tiene un valor constante. Hemos de recordar además que las *superficies equipotenciales* son líneas cuando trabajamos en dos dimensiones. Supongamos que el valor de la función constante del potencial sea K, entonces se cumple

$$K = 2y - x^2$$

de lo que se deduce

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{K}{2}$$

que representa la ecuación de una parábola. Por tanto, **las superficies equipotenciales son parábolas.**

b) Para calcular la intensidad de campo tendremos en cuenta que se cumple

$$\vec{\mathbf{E}} = -\overrightarrow{\mathbf{grad\ V}}$$

y que

$$\overrightarrow{\mathbf{grad\ V}} = \frac{\delta V}{\delta x}\vec{\mathrm{i}} + \frac{\delta V}{\delta y}\vec{\mathrm{j}}$$

al ser $V = 2y - x^2$ se cumplirá que

$$\vec{\mathbf{E}} = -\overrightarrow{\mathbf{grad\ V}} = (-2x)\,\vec{\mathrm{i}} + (2)\,\vec{\mathrm{j}}$$

Por tanto, al dar valores a las coordenadas X,Y tendremos los correspondientes valores de E.

13. El potencial en un punto del espacio de coordenadas (x,y,z) queda determinado por la función

$$V = 4x^2 - 3y^2 + 2z \qquad \text{(SI)}$$

Determinar el valor de la intensidad de campo en el punto A $(1, -1{,}0)$.

Resolución

Sabemos que debe cumplirse

$$\vec{\mathbf{E}} = -\overrightarrow{\text{grad } V} = -\left(\frac{\delta V}{\delta_x}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\delta V}{\delta_y}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\delta V}{\delta_z}\vec{\mathbf{k}}\right)$$

$$E_x = -\frac{\delta V}{\delta x} = -8x$$

$$E_y = -\frac{\delta V}{\delta y} = 6y$$

$$E_Z = -\frac{\delta V}{\delta z} = -2$$

de lo que se deduce

$$\vec{\mathbf{E}} = -8x\,\vec{\mathbf{i}} + 6y\,\vec{\mathbf{j}} - 2\,\vec{\mathbf{k}} \qquad \text{(SI)}$$

y en el punto considerado A $(1, -1{,}0)$

$$\vec{\mathbf{E}} = -8\vec{\mathbf{i}} - 6\vec{\mathbf{j}} - 2\vec{\mathbf{k}}$$

14. Un electrón que se mueve a la velocidad de $2 \cdot 10^5$ m/s, en el sentido positivo del eje OX, penetra en un campo eléctrico uniforme de intensidad $10^5\ N \cdot C^{-1}$, perpendicularmente a las líneas de fuerza del campo que actúan de arriba abajo. Calcular:

a) Aceleración a que se ve sometido el electrón en el interior del campo.

b) Trayectoria que seguiría este electrón.

(Carga $e^- = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; masa del $e^- = 9 \cdot 10^{-31}$ kg.)

Resolución

a) Veamos un esquema del problema propuesto.

Sobre el electrón actúa una fuerza $\vec{F}$ de valor

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q = m \cdot \vec{a}$$

de lo que se deduce que su aceleración valdrá

$$\boldsymbol{a} = \frac{E \cdot q}{m} = \frac{2 \cdot 10^5\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{C}^{-1} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot \mathrm{C}}{9 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}} = \mathbf{3{,}5 \cdot 10^{16}\ m/s^2}$$

b) Para hallar la trayectoria veamos el movimiento que toma el electrón: Sobre el eje OX la velocidad es constante, pues no actúa ninguna fuerza en este sentido y no hay por tanto aceleración, por lo que

$$x = V_x \cdot t$$

En la dirección del eje OY es donde actúa la aceleración hallada, que al ser constante da origen a un movimiento uniformemente acelerado sin velocidad inicial en este sentido y, por tanto,

$$y = \frac{1}{2}\, a \cdot t^2 = \frac{1}{2}\, \frac{E \cdot q}{m} \cdot t^2$$

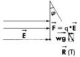
si despejamos t en la primera ecuación y sustituimos en la segunda hallaremos la ecuación que se nos pide:

$$t = \frac{X}{V_x} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\, \frac{E \cdot q}{m} \cdot \left(\frac{X}{V_x}\right)^2$$

$$\boldsymbol{y = 4{,}375 \cdot 10^5\, x^2}$$

15. Un campo eléctrico uniforme de intensidad 1 N · C^{-1} actúa en dirección horizontal de izquierda a derecha. En su interior se introduce un hilo, que actúa de péndulo simple, del que suspendemos una masa de 10^{-5} kg con una carga de $2 \cdot 10^{-4}$ C. Determinar el ángulo de inclinación del hilo respecto a la vertical y la tensión que soporta el hilo en la nueva posición de equilibrio.

Resolución



Hagamos un esquema del problema propuesto.

Vemos cómo la carga, al ser positiva, sufre una repulsión, y sigue la dirección del campo al verse sometida a la fuerza

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q$$

que hace desviar al hilo de su posición de equilibrio un ángulo φ hasta conseguir que la tensión del hilo equilibre a la resultante del peso y de la fuerza debida al campo. Para hallar φ.

$$\text{tg}\ \varphi = \frac{E \cdot q}{mg} = \frac{1\ \text{N} \cdot \text{C}^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-4}\ \text{C}}{10^{-5}\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = 2{,}04$$

de lo que se deduce

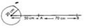
$$\varphi = 63°53'42''$$

Para hallar la tensión que soporta el hilo tendremos que hallar la resultante entre la fuerza debida al campo y el peso del cuerpo.

$$T = \sqrt{(1 \cdot 2 \cdot 10^{-4}\ \text{N})^2 + (10^{-5} \cdot 9{,}8\ \text{N})^2} = 2{,}22 \cdot 10^{-4}\ \text{N}$$

16. Una esfera hueca situada en el vacío, de 20 cm de radio, tiene uniformemente distribuida su carga positiva de $5 \cdot 10^{-8}$ C. Calcular el trabajo que realizamos al trasladar una carga positiva de $5 \cdot 10^{-9}$ C desde un punto A situado a una distancia del centro de la esfera de 50 cm hasta un punto B, a una distancia de 120 cm del centro de la esfera, tomados los dos puntos sobre la misma recta.

Resolución



Veamos un esquema del problema propuesto.

Calculemos el valor del potencial en los puntos A y B. El teorema de Gauss permite deducir que en este caso el valor del potencial para un punto exterior a la esfera, como el A o el B, es el mismo que el que crearía una carga, de valor igual al valor de la carga total de la esfera, situada en su centro, es decir,

$$V_A = k\frac{q}{r_A} = 9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-8}}{0,5} \text{ V} = 900 \text{ V}$$

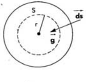
$$V_B = K\frac{q}{r_B} = 9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-8}}{1,2} \text{ V} = 375 \text{ V}$$

El trabajo para trasladar una carga q entre los puntos A y B vendrá dado por

$$W_{A \to B} = q(V_A - V_B) = 5 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot (900 - 375) \text{ V} = \mathbf{2{,}6 \cdot 10^{-6} \text{ J}}$$

17. Calcular, aplicando el Teorema de Gauss, el valor del campo y el del potencial en un punto interior de una masa esférica uniformemente distribuida, es decir de densidad constante.

Resolución



Hagamos un esquema de la esfera, en la que indicamos un punto interior sobre el cual trazamos una superficie S con centro el de la esfera y radio r.

Sea ésta la superficie gausiana considerada sobre la cual hallaremos el flujo. Se cumple por la definición de flujo, ϕ, que

$$\phi = \int \vec{g} \cdot \vec{ds}$$

Si tenemos en cuenta que g debe ser constante en todos los puntos de esta superficie

$$\vec{g} \cdot \vec{ds} = g \cdot dS \cdot \cos 180 = -g \cdot dS$$

y el flujo ϕ valdrá

$$\phi = \int -g \cdot dS = -g \int dS = -g \cdot 4\pi r^2$$

Considerando el Teorema de Gauss, el flujo ϕ valdrá

$$\phi = -4\pi G \cdot m_{\text{interior}} = -4\pi G\, (V_{\text{int}} \cdot \rho) = -4\pi G\, (\frac{4}{3}\, \pi r^3 \cdot \rho)$$

y, por tanto, igualando las dos expresiones del flujo,

$$-g \cdot 4\pi r^2 = -4\pi G \cdot \frac{4}{3}\, \pi r^3 \rho$$

simplificando y despejando g,

$$g = \frac{4}{3}\, G\pi r\rho$$

El valor del potencial lo hallaremos aplicando

$$V_r - V_\infty = \int g \cdot dr = \int g \cdot dr \cdot \cos 180 = \int -g \cdot dr$$

$$V_r - V_\infty = \int_\infty^r -\, g \cdot dr = \int_\infty^r -\left(\frac{4}{3}\, \pi G r\rho\right) \cdot dr =$$

$$= -\,\frac{4}{3}\, G\rho \int_\infty^r r \cdot \mathrm{dr}$$

y al ser $V_\infty = 0$, tendremos

$$V_r = -\,\frac{4}{3}\, \pi G\rho \cdot \left| \frac{r^2}{2} \right|_\infty^r = -\frac{2}{3}\, \pi G\rho r^2$$

18. Considerando que el campo creado por una distribución plana de cargas en un punto situado en su exterior vale

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

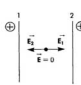
hallar el campo creado en un punto interior de la región comprendida entre dos superficies planas, paralelas e indefinidas, uniformemente cargadas con densidad de carga constante, en los siguientes supuestos:

a) Las dos placas son de carga positiva.

b) Las dos placas son de carga negativa.

c) Una placa es de carga positiva y la otra negativa.

Resolución

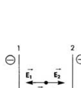


a) Veamos un esquema y representemos la dirección y sentido de los vectores intensidad de campo que crean las placas en un punto considerado.

En el supuesto de que la densidad superficial de carga en cada placa sea constante y de valor σ y que el valor de la constante dieléctrica del medio sea ε, los módulos de los vectores E_1 y E_2 serán

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \qquad \text{y} \qquad E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

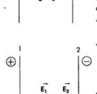
y como en este caso los mencionados vectores tienen la misma dirección y sentidos opuestos, el vector resultante será nulo.



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$$

b) En el supuesto de que las dos placas estén cargadas con una densidad de carga constante σ y que el medio que separe las cargas tenga constante dieléctica ε, ocurre que los vectores E_1 y E_2 serán como se indica en la figura.

El módulo de los vectores intensidad de campo será del mismo valor que en el caso anterior, y el campo resultante será nulo.



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$$

c) Si una placa es positiva y la otra negativa, con las mismas condiciones anteriores, se cumple lo representado en la figura.

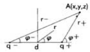
Y en este caso el valor del módulo de la intensidad de campo vale

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon} + \frac{\sigma}{2\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

La dirección será perpendicular a las placas, y el sentido, desde la placa positiva hacia la placa negativa.

19. Determinar el valor del potencial, creado por un dipolo, de cargas $+q$ y $-q$ separadas una distancia d, de un punto situado a r metros del centro del dipolo.

Resolución



Hagamos un esquema situando el dipolo sobre el eje de las X y de forma que su centro coincida con el centro de coordenadas.

En el punto A el valor del potencial será la suma de los potenciales creados por cada una de las cargas

$$V_A = K\frac{q}{r_+} + \left(-K\frac{q}{r_-}\right) = Kq\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) =$$

$$= Kq\left(\frac{r_- - r_+}{\mathrm{r}_+ \cdot \mathrm{r}^-}\right) \qquad (1)$$

Esta expresión puede quedar reducida a otra más sencilla en el caso de que $r >> d$, pues entonces se podrán tomar las aproximaciones

$$r_- - r_+ \approx 2\,d\cos\varphi$$

$$r_- \cdot r_+ \approx r_2$$

$$\varphi_- \approx \varphi_+ \approx \varphi$$

y la ecuación (1) se podrá expresar como

$$V_A = K\frac{q \cdot d\cos\varphi}{r^2}$$

Se define el vector momento dipolar m como un vector cuya dirección es la de la recta de unión de las cargas, su sentido el que va de la carga positiva a la negativa, y su módulo se identifica con el producto de una de las cargas por la distancia que las separa ($q \cdot d$). Por tanto, la expresión anterior puede quedar simplificada del modo siguiente:

$$V_A = \left| K \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \right|$$

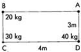
Ejercicios propuestos

Nota: En todos los ejercicios que siguen hemos adoptado los mismos valores para las constantes que se indican:

Constante de la Gravitación, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm$^2 \cdot$ kg^{-2}.
Masa de la Tierra = $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.
Radio de la Tierra = 6.370 km.
Intensidad del campo gravitatorio de la Tierra al nivel del mar y 45° de latitud, $g_0 = 9{,}8$ N $\cdot$ kg^{-1}.
Masa del electrón = $9 \cdot 10^{-31}$ kg.
Carga del electrón = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

1. Calcular el valor de la intensidad del campo gravitatorio y el valor del potencial, creados por el sistema de masas de la figura en el punto *A*.

Solución



$|\vec{g}| = 3{,}47 \cdot 10^{-8}$ **N $\cdot$ kg^{-1}**; $\alpha = 246°48'$;
$V_A = 1{,}62 \cdot 10^{-9}$ **J $\cdot$ kg^{-1}**

2. Un satélite artificial de 10^3 kg gira alrededor de la Tierra, en una órbita estable, a 5.000 km de la superficie terrestre. Calcular:

a) Velocidad de giro.
b) Período de revolución.
c) Energía cinética en la órbita.
d) Energía potencial del satélite.

Solución

a) $v = 5{,}92 \cdot 10^3$ **m/s**; *b)* $T = 12067$ **s = 3,35 h**;
c) $E_c = 1{,}75 \cdot 10^{10}$ **J**; *d)* $E_p = 3{,}50 \cdot 10^{10}$ **J**

3. Al alejarse de la superficie terrestre un cuerpo disminuye de peso con la altura. ¿A qué altura debe alejarse para que su peso se haya convertido en la mitad?

Solución

$$h = 2638 \text{ km}$$

4. En el supuesto de que la Tierra sólo tuviese movimiento de rotación sobre su eje, sin trasladarse alrededor del Sol, ¿cuál debería ser la velocidad de giro para que el peso de un cuerpo situado en el ecuador y al nivel del mar quedara reducido a la cuarta parte de su valor?

Solución

$$\omega = 1{,}07 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 92{,}8 \text{ vueltas. día}^{-1}$$

5. Calcular la variación de la energía potencial gravitatoria de un satélite artificial de 10^4 kg cuando se eleva desde la superficie terrestre a un punto situado a 1.500 km de altura.

Solución

$$E_p = -1{,}33 \cdot 10^{20} \text{ J}$$

6. ¿Qué velocidad deberá llevar un satélite artificial de 5 Tm que orbita alrededor de la Tierra a una altura respecto a la superficie igual a 3 veces el radio terrestre para mantenerse en órbita estable?

Solución

$$v = 3956 \text{ m/s}$$

7. Un satélite artificial describe una órbita circular de 6.500 km medidos desde el centro de un planeta y con un período de 80 días. Determinar la masa del planeta.

Solución

$$M_{\text{planeta}} = 3{,}20 \cdot 10^{18} \text{ kg}$$

8. Un satélite de 1,5 Tm de masa se eleva una altura de 6.800 km del centro de la Tierra y una vez alcanzada esta altura los cohetes propulsores hacen que describa una trayectoria circular estable alrededor de la Tierra. Calcular:

a) Velocidad que habrá de comunicarse al satélite para mantenerlo en órbita.

b) Trabajo necesario para llevar el satélite desde la superficie terrestre hasta la altura que orbita.

c) Energía que tendrá el satélite puesto en movimiento.

Solución

a) $\boldsymbol{v} = \mathbf{7658\ m/s}$; *b)* $\boldsymbol{W} = \mathbf{5{,}92 \cdot 10^9\ J}$; *c)* $\boldsymbol{E} = \mathbf{4{,}38 \cdot 10^{10}\ J}$

9. De un planeta se conocen los siguientes datos:

a) Radio $= 2R_T$

b) Uno de sus satélites, que orbita a una distancia 4 veces el radio del planeta medida desde su centro, tiene un período de giro de 18 h.

Con estos datos calcular el valor de la intensidad de campo en la superficie del planeta, despreciando el efecto de giro sobre sí mismo.

Solución

$\boldsymbol{g} = \mathbf{7{,}66\ N \cdot kg^{-1}}$

10. Calcular la energía necesaria para poner en órbita un satélite artificial de 3.500 kg, lanzado desde el ecuador, de forma que describa una órbita circular de radio $3R_T$ y en el supuesto de que se mantenga en la misma vertical del ecuador.

(Considerar que el período en el ecuador es de 86.400 s.)

Solución

$\boldsymbol{E}_{\text{necesaria}} = \mathbf{1{,}81 \cdot 10^{11}\ J}$

11. Determinar la masa y la densidad media de la Tierra tomando como datos R_T y los valores de G y de g_0.

Solución

$\boldsymbol{M_T = 5{,}96 \cdot 10^{24}}$ **kg;** $\boldsymbol{\rho = 5532{,}5}$ **kg · m**$^{-3}$

12. Si la relación de masas Tierra-Luna es $M_T = 81M_L$, la relación de radios $0{,}27R_T = R_L$ y la distancia Tierra-Luna $60{,}3R_T$, calcular el valor de la intensidad de campo gravitatorio en la superficie lunar dando por conocido que g_0 para la Tierra es 9,8 N · kg^{-1} al nivel del mar.

Solución

$\boldsymbol{g = 1{,}647}$ **N · kg**$^{-1}$

13. Tres cargas de $3 \cdot 10^{-5}$ C están situadas en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado que se encuentra en el vacío. Calcular el valor de la intensidad de campo y del potencial en el cuarto vértice.

Solución

$\boldsymbol{E = 5{,}16 \cdot 10^{5}}$ **N · C**$^{-1}$**;** $\boldsymbol{\beta = 45°}$**;** $\boldsymbol{V = 73{,}09 \cdot 10^{4}}$ **V**

14. Un potencial eléctrico viene dado en el plano XY por la función

$$V = 5y - 2x^2$$

Determinar:

a) Forma de las superficies equipotenciales.

b) Valor de la intensidad de campo.

Solución

a) **$y = 2/5\ x^2$ - cte. tienen forma de parábolas;**
b) $\boldsymbol{\vec{E} = 4x\,\vec{i} - 5\,\vec{j}}$

15. Un campo eléctrico uniforme está dirigido verticalmente en el sentido de arriba hacia abajo, con intensidad de $2 \cdot 10^4$ N · C^{-1}. Calcular:

a) La fuerza ejercida por este campo sobre un electrón en reposo.

b) El electrón, al estar sometido a la acción del campo y despreciando la fuerza peso, ¿qué velocidad llevará cuando haya recorrido el espacio de 10 cm si suponemos que partió del reposo?

c) ¿Cuál sería la energía cinética en este momento?

Solución

a) $\boldsymbol{F} = 3{,}2 \cdot 10^{-15}$ **N**; *b)* $\boldsymbol{v} = 26{,}66 \cdot 10^3$ **km/s**;
c) $\boldsymbol{E}_c = 3{,}2 \cdot 10^{-16}$ **J**

16. Un campo eléctrico de 10 NC^{-1} actúa en dirección vertical y sentido ascendente. Dentro de este campo se sitúa una partícula con carga positiva de valor $3 \cdot 10^{-5}$ C y cuya masa es de $2 \cdot 10^{-3}$ g. Calcular:

a) La aceleración con que se movería la partícula.

b) El valor de la intensidad de campo para que la partícula permanezca en reposo.

Solución

a) $\boldsymbol{a} = 140 \cdot 2$ **m/s²**; *b)* $\boldsymbol{E} = 0{,}653$ **N · C^{-1}**

17. Tres electrones se encuentran en reposo a una distancia recíproca de $3{,}10^{-9}$ cm formando un triángulo equilátero. Sometidos a las fuerzas de Coulomb, se repelen mutuamente. Calcular la energía electrostática del conjunto de las tres partículas.

Solución

$\boldsymbol{E} = 288$ **J**

18. Calcular el campo eléctrico que crea un hilo recto e indefinidamente largo, con densidad de carga constante, en un punto situado a una distancia r del hilo, aplicando el Teorema de Gauss.

Solución

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\frac{\sigma}{r}$$

19. Calcular, aplicando el Teorema de Gauss, el campo creado por una distribución esférica de carga con densidad de carga constante, en un punto exterior de la esfera situado a una distancia r de su centro, y el valor del potencial en este punto.

Solución

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2} \qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r}$$

Esta colección tiene como objetivo presentar material que, a la vez que valioso pedagógicamei sirva de excelente guía práctica para preparar temas de COU y Selectividad, tanto en el aspe de conocimientos como en lo referente a ejercic prácticos. Por ello, la colección está concebida forma de cuadernos, para que cada profesor o alı no trabaje aquellos temas que considere más a cuados a sus intereses.

Cada cuaderno ofrece la siguiente estructura:

- *Recordatorio de puntos fundamentales.*
- *Cuestiones de autoevaluación.*
- *Ejercicios resueltos.*
- *Ejercicios propuestos, con su solución.*

Cuadernos de COU y
Selectividad

FISICA

ÍNDICE DE TÍTULOS

ISBN 84-205-2127-2

Alhambra Longman